Analysis 11.6.18

Bei der exakten Berechnung von bestimmten Integralen (reellen Zahlen der Form $\int_a^b \dots dx$) reduziert man

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx, \quad \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx, \dots$$

auf

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \text{ mit}$$

f	Stammfunktion $F'(x) = f(x)$
$f(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R}$	$\underbrace{F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}_{\text{alle Stammfunkt. von } f(x),\ C \in \mathbb{R}}$, denn $F'(x) = f(x)$
$f(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + C$,
$f(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + C$
$f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$	$F(x) = \arctan(x) + C$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \qquad F(x) = \arcsin(x) + C$

$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \qquad F(x) = \arccos(x) + C$

$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \cos(x) \neq 0 \qquad F(x) = \tan(x) + C$

1) Vereinfache Integrand, d.h.

- $\int_0^1 (\tan(x) + x^5(1+x))\,dx =$

  $\int_0^1 \tan(x)\,dx + \int_0^1 x^5 \cdot (1+x)\,dx =$

  $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx + \int_0^1 (x^5 + x^6)\,dx$ Def. von trigonom. Funktionen

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx =$

  $-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_0^{\pi/2}$

- Für $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1, \\ x+1, & x > -1, \end{cases}$ gilt

  $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} x\,dx + \int_{-1}^{3} (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{3}$

- $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2+x+\frac{5}{4}}\,dx \underset{\text{quadr. Erg.}}{=} \int_{-1}^{2} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{5}{4}-\frac{1}{4})}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + 1}\,dx$

  $= \arctan(x+\frac{1}{2})\Big|_{-1}^{3}$

  $x^2 + 2bx + c =$

  $(x+b)^2 + (c-b^2)$, falls d. Nullstellen von $x^2 + x + \frac{5}{4} = 0$ komplex sind, *

* deun $x^2 + x + \frac{5}{4} = (x+\frac{1}{2})^2 + 1 = 0 \iff (x+\frac{1}{2})^2 = -1$

- $$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$$

(quadr. Erg.
$x^2+x-2 = (x+\frac{1}{2})^2 - 2 - \frac{1}{4} = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$

reelle Nullstellen
$x_1 = +1, \; x_2 = -2$

$$= \int_1^2 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\right) dx$$

Partialbruch-
zerlegung, wobei

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

zu merken
x^n
$\cos(x)$
$\sin(x)$
e^x
$\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x+2) + B(x+1) \quad \Rightarrow \quad x \cdot \boxed{0} + 1 = x\boxed{(A+B)} + (2A-B)$$

Koeffizienten-
vergleich

$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}, \; B = \frac{1}{3}$$

Daraus folgt

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \int_1^2 \frac{1/3}{x-1}\,dx + \int_1^2 \frac{-1/3}{x+2}\,dx =$$

$$\frac{1}{3}\ln(x-1)\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\cdot\ln(x+2)\Big|_1^2$$
*

* Abl. $\left(\frac{1}{3}\ln(x-1)\right)' =$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}$

2, Errate die Stammfunktionen, falls möglich (d.h. suche die Stammfunktion aus einer Tabelle aus)

3, sonst,

- Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Stammfunktion
$F(g(x))$ mit $F'(f)$

Kettenregel: $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$
$= f(g(x)) \cdot g'(x)$

und man bekommt ($z = g(x)$, $z' = \frac{dz}{dx} = g'(x)$, $dz = g'(x)\,dx$)

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{=z}) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{=dz} =$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} F(z) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Stammfunktion F, $F' = f$
ist einfacher zu bestimmen
(einfacher in der Tabelle zu finden)

z.B. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1/3}{x-1}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{z}\,dz \overset{*}{=}$

$z = g(z)$

$x \in [1,2]$

$z \in [g(1), g(2)] = [1-1, 2-1] = [0, 1]$

$* \ \frac{1}{3} \ln(z) \Big|_0^1 = ?$

$\ln(z)$ unbeschränkt falls $z \to 0$

g str. mon. wachs.

- $$\int_0^1 \tan(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{f(g(x))} \underbrace{(-\sin(x))\,dx}_{g'(x)}$$

mit $g(x) = \cos(x)$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$=$

$z = \cos(x),\ x \in [0,1]$

$z \in [\cos(0), \cos(1)] = [1, \cos(1)]$

$\cos(x)$ streng mon. fallend für $x \in [0,1]$

$$= -\int_1^{\cos(1)} \frac{1}{z}\,dz = \cancel{\ }+\int_{\cos(1)}^{1} \frac{1}{z}\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tabelle}}}{=} \ln(z)\Big|_{\cos(1)}^{1}$$

$\cos(1) < 1$

- partielle Integration vereinfacht

$$\int_a^b u'(x)\,v(x) =$$

(Produktregel: $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$)

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b (u(x)\cdot v(x))'\,dx}_{\substack{\text{Stammfunktion} \\ \text{ist } u(x)\cdot v(x) \text{, denn} \\ (u(x)\cdot v(x))' = \text{Integrand}}} - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx =$$

$$\underbrace{u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx}_{\substack{\text{falls } u,v \text{ richtig gewählt, dann} \\ \text{ist } \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx \text{ einfacher}}}$$

Bsp.

$$\int_0^{3/4} \frac{4x}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{3/4} \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{\cancel{4}^{2}x}_{g'(x)}\,dx = 2\cdot\int_1^{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} \frac{1}{z}\,dz = \ldots$$

$z = 1+x^2 = g(x),\ x \in [0, 3/4]$

$z \in [g(0), g(3/4)] = [1, 1+(3/4)^2]$

partielle Integr.

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(x)\,dx = *$$

Substitution

Tabelle

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x^2+1)}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_1^{\pi^2+1} \sin(z)\,dz = \ldots$$

$g(x) = x^2+1 = z,\ x \in [0, \pi],$

$z \in [g(0), g(\pi)] = [1, \pi^2+1]$

Produkt mit 1 ergänzt

$$\int_1^2 1 \cdot \ln(x) \cdot dx$$

Tabelle

$$* \underset{\text{partielle Integration}}{=} \underbrace{\cos(x)\cdot x}_{u(x)\cdot v(x)} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{-\cos(x)\cdot 1}_{u(x)\cdot v'(x)}\,dx = -\cos(x)\cdot x \Big|_0^{\pi/2} + \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = *$$

Falsche Wahl: $u'(x) = x \quad v(x) = \sin(x)$

$u(x) = \frac{1}{2}\cdot x^2 \quad v'(x) = \cos(x)$

Richtige Wahl $v(x) = x \quad v'(x) = 1$

$u'(x) = \sin(x) \quad u(x) = -\cos(x)$

$* = 0 - 0 + 1 + 0 = 1$

$$\int_1^2 1 \cdot \ln(x)\, dx = \underbrace{x \cdot \ln(x)}_{u(x)\cdot v(x)} \Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{u(x)\cdot v'(x)} dx = *$$

Falsche Wahl: $v(x) = 1 \qquad u'(x) = \ln(x)$

$u(x) = ?$

Richtige Wahl: $v(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \frac{1}{x} \qquad u(x) = x$

$$* = x \cdot \ln(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 1\, dx = x \cdot \ln(x) \Big|_1^2 - x \Big|_1^2$$

$$= 2\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 2 + 1$$

Beweisidee (Satz 5.7, Lemma 5.8)

1) Satz 5.7 Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar

Dann gilt $f+g$, $f-g$, $\lambda \cdot f$ integrierbar und

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$ denn

(Riemann - Summen) $\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \cdot (x_{j+1} - x_j) + \sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j) \cdot (x_{j+1} - x_j)$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(\xi_j) + g(\xi_j) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

Da f, g integrierbar sind, gilt

$$\lim_{\max_j |x_{j+1}-x_j| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b f(x)\,dx$$

und

$$\lim_{\max_j |x_{j+1}-x_j| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b g(x)\,dx$$

$\overset{\text{Satz 2.5}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\lim_{\max |x_{j+1}-x_j| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) + g(\xi_j)] \cdot (x_{j+1} - x_j) =}_{\in \mathbb{R}\text{, die gleich } \int_a^b f+g\,dx}$

$$= \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ f \text{ integr.}}} + \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ g \text{ integr.}}}$$

Analog für $\lambda \cdot f$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx =$$

$$\lim_{\max_j |x_{j+1}-x_j| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda f(\xi_j) \cdot (x_{j+1} - x_j)$$

$$= \lim \lambda \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \ldots \overset{2.5}{=} \lambda \underbrace{\lim \sum f(\xi_j) \cdot (x_{j+1} - x_j)}_{\int_a^b f(x)\cdot dx}$$

Integrale = Grenzwerte

2) Lemma 5.8

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^t f(x)\,dx + \int_t^b f(x)\,dx$$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integr.
$t \in [a,b]$

(Darboux-Summen) $\sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\inf \{ f(x) : x \in [x_j, x_{j+1}) \}}_{\substack{= f(y_j), \\ y_j \in [x_j, x_{j+1}]}} (x_{j+1} - x_j)$

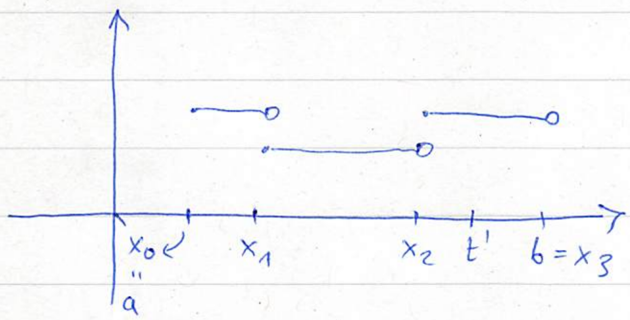
$= \int_a^b \underbrace{t(x)}_{\text{Treppenfunktion}} dx$, $t \leq f$ auf $[a,b]$

$\sum_{j=0}^{n-1} \sup \{ \dots \} (x_{j+1} - x_j) = \int_a^b T(x)\,dx$, $T \geq f$ auf $[a,b]$

Dann $\exists! \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$:

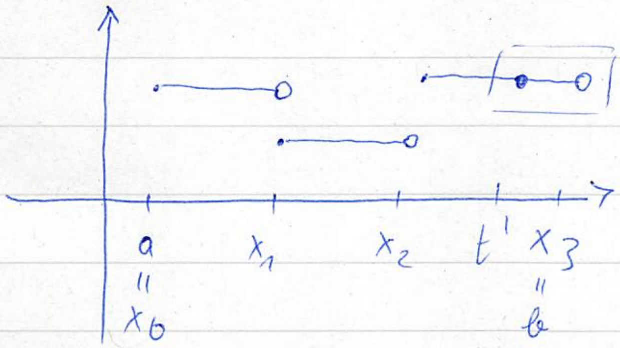
$$\underbrace{\int_a^b t(x)\,dx}_{} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b T(x)\,dx \quad \forall t, T$$

Wähle $t \in [a,b]$, s.d. t, T auf $[a,t]$ und $[t,b]$ Treppenfunktionen $\to$ ist immer möglich, denn



t oder T

Treppenfunktionen auf $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$



Es gilt

$$\underbrace{\int_a^{t'} t(x)\,dx}_{\substack{\text{Teil auf} \\ \text{Zerlegung} \\ x_0 < x_1 < \ldots < t'}} \leq \int_a^{-t} f(x)\,dx \leq \int_a^{-t} T(x)\,dx$$

und

$$\underbrace{\int_{t'}^{b} t(x)\,dx}_{\substack{\text{Teil auf} \\ \text{Zerlegung} \\ t' < \ldots < x_n}} \leq \int_{t'}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{t'}^{b} T(x)\,dx$$

$$\int_a^{t'} t(x)\,dx + \int_{t'}^{b} t(x)\,dx \leq \int_a^{t'} f(x)\,dx + \int_{t'}^{b} f(x)\,dx \leq \ldots$$

Bem. 5.3 ii

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b t(x)\,dx}_{\int_a^{t'} \ldots + \int_{t'}^b \ldots} \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\int_a^{t'} f(x)dx + \int_{t'}^b f(x)dx} \leq \underbrace{\int_a^b T(x)\,dx}_{\int_a^{t'} \ldots + \int_{t'}^b \ldots} \quad \forall t, T$$

$\blacksquare$

5.10 Hauptsatz d. Integral- und Differential-rechnung

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig

(I) Dann ist $F: [a, b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , x \in [a, b]$$

diff.bar auf (a, b) und $F'(x) = f(x)$ (d.h. F ist eine Stammfunktion von f)

$$(F(x))' = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$

d.h. Integration ist die Umkehroperation zur Differentiation

(I) besagt auch, dass jede stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt

(II) (Koroller von I)
und eine Methode um $\int_a^b f(x)\,dx$ zu berechnen

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

<u>Beweis</u>

(I) Satz 5.6 : Jede stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar d.h. $F(x) = \int_a^{x} \underbrace{f(t)\,dt}_{\substack{\text{integrierbar} \\ \text{auf } [a,x] \\ \text{nach Lemma 5.8}}} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b]$

d.h. es existiert $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (sinnvoll)

2) Mittelwertsatz (v. Cauchy 1821)
$(f \text{ stetig auf } [a,b]) \Rightarrow \left(\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x) \cdot dx = f(\xi)(b-a)\right)$, denn

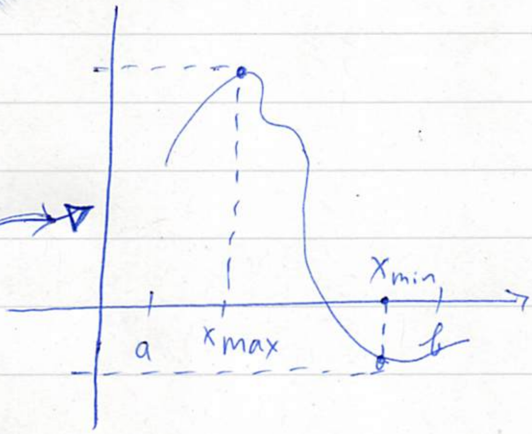
$(f \text{ stetig auf } [a,b]) \underset{\text{Satz 4.4}}{\Rightarrow} \exists m, M : m = \underbrace{f(x_{min})}_{\substack{\text{globales} \\ \text{Minimum}}} \leq f(x) \leq M = \underbrace{f(x_{max})}_{\substack{\text{globales} \\ \text{Max}}}$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \right)$$

$$\Rightarrow m \cdot \underbrace{(b-a)}_{>0} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot \underbrace{(b-a)}_{>0}$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Zwischenwertsatz 4.14

$$f : [a, b] \to [\underbrace{f(x_{min})}_{m}, \underbrace{f(x_{max})}_{M}] \text{ surjektiv}$$

$$\underset{\text{Def. Surj.}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, \xi \in [a,b] : \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$

3) $$F'(x) \overset{\text{Def.}}{=} \cancel{\lim}\ \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \overset{\text{Def. von } F}{=}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\cdot\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right) =$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\cdot\left(\int_{\boxed{a}}^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^{\boxed{a}} f(t)\,dt\right) =$$

$$\ldots \quad \frac{1}{h}\underbrace{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}_{f(\xi)(x+h-x)}$$

Verwende
[2]

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot f(\xi) \cdot \cancel{h} = f(x)$$

$\xi \in [x, x+h]$

Falls $h \to 0$, $\xi = x$

$\blacksquare$